

Tehtävä

Mitä arvoja integraali $\int_0^1 |x - kx^2| dx$ voi saada, kun $k \in \mathbb{R}$?

Ratkaisu

Oletetaan, että $k \leq 1$. Tuolloin $1 - kx \geq 0$ kun $x \in [0, 1]$, joten

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x - kx^2| dx &= \int_0^1 |x| |1 - kx| dx \\&= \int_0^1 x(1 - kx) dx \\&= \int_0^1 x - kx^2 dx \\&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{kx^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} \\&= \frac{1}{2} - \frac{k}{3} \\&\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\&= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

joten kyseessä oleva integraali saa ainakin kaikki arvot välillä $[\frac{1}{6}, \infty)$.

Oletetaan nyt, että $k > 1$. Tällöin suora $y = 1 - kx$ leikkaa x -akselin pisteessä x' siten, että $x' \in (0, 1)$. Pisteessä $x = \frac{1}{k}$ yllämainittu suora saavuttaa (ylhäältä) x -akselin, ja "peilautuu" ylöspäin. Toisin sanoen, välillä $[0, \frac{1}{k})$ suora

on x -akselin yläpuolella, ja välillä $(\frac{1}{k}, 1]$ sen alapuolella, josta saadaan

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |x - kx^2| \, dx &= \int_0^{\frac{1}{k}} x|1 - kx| \, dx + \int_{\frac{1}{k}}^1 x|1 - kx| \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{k}} x(1 - kx) \, dx + \int_{\frac{1}{k}}^1 x(kx - 1) \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{k}} x - kx^2 \, dx + \int_{\frac{1}{k}}^1 kx^2 - x \, dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{kx^3}{3} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{k}} + \left[\frac{kx^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{x=\frac{1}{k}}^1 \\
 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} \right)^3 \right) + \left(\frac{k}{3} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \right)^2 \right) \\
 &= \left(\frac{1}{k} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k} \right)^3 + \frac{k}{3} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} \right)^3 + \frac{k}{3} - \frac{1}{2} \\
 &= g(k).
 \end{aligned}$$

Seuraavaksi täytyy selvittää funktion g minimiarvo. Derivoidaan ensin:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dk} g(k) &= \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} \right)^3 + \frac{k}{3} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{d}{dk} \frac{1}{3} k^{-3} + \frac{1}{3} \\
 &= -\frac{2}{3} k^{-3} + \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Koska jatkuvan funktion lokaalit minimit ja maksimit ovat mahdollisia vain niissä pisteissä, joissa funktion derivaatta on nolla, selvitetään g :n derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dk} g(k) = 0 &\iff -\frac{2}{3} k^{-3} + \frac{1}{3} = 0 \\
 &\iff \frac{2}{3} k^{-3} = \frac{1}{3} \\
 &\iff 2k^{-3} = 1 \\
 &\iff k^3 = 2 \\
 &\iff k = \sqrt[3]{2}.
 \end{aligned}$$

Seuraavaksi on määritettävä derivaatan derivaatta:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dk} \left(-\frac{2}{3}k^{-3} + \frac{1}{3} \right) &= -\frac{2}{3} \frac{d}{dk} k^{-3} \\ &= -\frac{2}{3}(-3)k^{-4} \\ &= 2k^{-4}.\end{aligned}$$

Koska on oletettu, että $k > 1$, $2k^{-4} > 0$, mistä seuraa, että pisteessä $k = \sqrt[3]{2}$ funktio g saavuttaa minimiarvonsa. Seuraavaksi arvioidaan $g(\sqrt[3]{2})$:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^2 + \frac{\sqrt[3]{2}}{3} - \frac{1}{2} \approx 0.12996.$$

Koska $\min(0.12996, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}) = 0.12996$, annettu integraali saa kaikki arvot välillä $[0.12996, \infty)$, kun $k \in \mathbb{R}$.